

dg 圏のホモトピー論に対する形式圏論的アプローチ

大阪大学大学院理学研究科数学専攻

今村 悠希 (Yuki IMAMURA) *

概要

dg 圏とは、Hom 集合が加群の複体の構造を持っているような圏のことをいう。dg 圏には擬同値と呼ばれる同値概念があり、すべての dg 圏は擬同値のもとで区別するべきとされる (dg 圏のホモトピー論)。本講演では、dg 圏のホモトピー論に対して 2 圏論・形式圏論の観点からアプローチを行う。形式圏論の理論においては、圏における極限の概念を形式的に定義できる。これを dg 圏のホモトピー論に適用することで、dg 圏のプレ三角性が一種の完備性として捉えられることを紹介する。

1 導入

dg 圏とは、Hom 集合が加群の複体の構造を持っているような圏である。dg 圏 $\mathcal{A}$ がプレ三角と呼ばれる性質を持つとき、その H^0 -圏 $H^0(\mathcal{A})$ が自然に三角圏の構造を持つ。このため dg 圏は、多元環の表現論をはじめ、三角圏を扱う代数幾何学や数理論理学などの分野において重要な研究対象となっている。

dg 圏には通常の圏同値に加えて、圏同値を弱めた擬同値と呼ばれる同値概念が存在する。dg 圏を擬同値のもとで識別する理論を「dg 圏のホモトピー論」と呼ぶ。この dg 圏のホモトピー論に立てば、dg 圏のなす圏 dgCat の代わりに dgCat を擬同値によって局所化した圏 $\mathrm{HodgCat}$ を考えるのが自然である。この圏 $\mathrm{HodgCat}$ を「dg 圏のなすホモトピー圏」と呼び、 $\mathrm{HodgCat}$ の射を dg 圏の擬関手という。

本小論では、dg 圏のホモトピー論に対して 2 圏論・形式圏論の観点からアプローチを行う。

dg 圏のなすホモトピー圏 $\mathrm{HodgCat}$ は対象と射だけを持つ通常の 1 圏として構成されるため、2 圏の構造を備えてはいない。一方で Toën [Toë07] による次の結果が知られている：擬関手の集合と右擬表現可能な dg 両加群の同型類の集合の間に全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HodgCat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cong \mathrm{Iso}(D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\mathrm{rqr}})$$

が存在する。この結果から、 $D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\mathrm{rqr}}$ を Hom 圏とする 2 圏 ${}^{*1}\mathrm{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ は $\mathrm{HodgCat}$ の自然な精密化となるような 2 圏だと思えることができる。これは dg 両加群の導来圏 $D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})$ を Hom 圏とする 2 圏 DBimod の部分 2 圏である。

* E-mail: u287972b@alumni.osaka-u.ac.jp

*1 正確には双圏 (bicategory) になる。

本小論では、二つの 2 圏 $\text{DBimod}^{\text{rqr}}$, DBimod の 2 圏的な性質（随伴や同値の特徴づけ）を調べた後、埋め込み $\text{DBimod}^{\text{rqr}} \hookrightarrow \text{DBimod}$ が形式圏論における副射装備と呼ばれる構造になっていることを確認する。形式圏論とは、2 圏論の一分野で、圏論それ自体を形式化しようとする試みのことを指し、副射装備は形式圏論を展開するための枠組みの一つである。副射装備の構造があると、通常の圏論におけるような極限の概念を抽象的な方法で定義することができる。この極限の形式的な定義を副射装備 $\text{DBimod}^{\text{rqr}} \hookrightarrow \text{DBimod}$ に適用することで、dg 圏におけるホモトピー極限の概念を導入できる。その具体例として、プレ三角な dg 圏における錐やシフトが得られることを確認し、プレ三角性がある種の完備性として捉えられることを紹介する。

本小論は [Ima24] に基づく。

2 dg 圏のホモトピー論と 2 圏的構造

簡単のため、基礎体 $\mathbb{k}$ 上で考える。 $\mathbb{k}$ 上の加群の複体のなす圏を $\text{Ch}(\mathbb{k})$ とすると、複体のテンソル積 $\otimes_{\mathbb{k}}$ と Hom 複体 $\text{Hom}^\bullet$ の構成により $\text{Ch}(\mathbb{k})$ は対称モノイダル閉圏になる。 ($\mathbb{k}$ 上の) dg 圏とは、モノイダル圏 $\text{Ch}(\mathbb{k})$ 上の豊穡圏のことを指す。

定義 2.1. dg 圏 $\mathcal{A}$ とは、

- 対象の集まり $\text{ob}(\mathcal{A})$
- 各対象 $A, B \in \mathcal{A}$ に対して Hom 複体 $\mathcal{A}(A, B) \in \text{Ch}(\mathbb{k})$ が与えられている
- 各対象 $A, B, C \in \mathcal{A}$ に対して複体の射 $\circ: \mathcal{A}(B, C) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{A}(A, B) \rightarrow \mathcal{A}(A, C)$ が与えられている（合成射と呼ぶ）
- 各 $A \in \mathcal{A}$ に対して複体の射 $\text{id}_A: \mathbb{k} \rightarrow \mathcal{A}(A, A)$ が与えられている（恒等射と呼ぶ）

からなるデータであって、結合律と単位律をみたすもののことである（詳しくは [Kel82] を見よ）。

例えば、 $\mathbb{k}$ -加群の複体は Hom 複体 $\text{Hom}^\bullet(X, Y)$ を Hom 対象とすることで dg 圏 $C_{\text{dg}}(\mathbb{k})$ をなす。また dg 代数は対象をただ一つだけ持つ dg 圏とみなせ、 dg 代数上の dg 加群もまだ dg 圏をなす。

dg 圏 $\mathcal{A}$ に対して、 $Z^0(\mathcal{A})(A, B) = Z^0(\mathcal{A}(A, B))$ を Hom 集合とする圏を $Z^0(\mathcal{A})$, $H^0(\mathcal{A})(A, B) = H^0(\mathcal{A}(A, B))$ を Hom 集合とする圏を $H^0(\mathcal{A})$ と表す。 $Z^0(\mathcal{A})$ を Z^0 -圏あるいは台圏、 $H^0(\mathcal{A})$ を H^0 -圏あるいはホモトピー圏と呼ぶ。

通常の圏論と同じように、 dg 圏の間の dg 関手やその間の dg 自然変換が定義できる。 dg 代数の導来圏の一般化として、 dg 圏の導来圏も定義できる。

定義 2.2. $\mathcal{A}$ を dg 小圏とする。

- (1) **(右) dg $\mathcal{A}$ -加群 M** とは、 dg 関手 $M: \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow C_{\text{dg}}(\mathbb{k})$ のことである。 dg 加群の間の射とは、 dg 関手の間の dg 自然変換のことである。 dg 加群の dg 圏を $C_{\text{dg}}(\mathcal{A})$ で表し、 $C(\mathcal{A}) = Z^0(C_{\text{dg}}(\mathcal{A}))$ とおく。
- (2) dg $\mathcal{A}$ -加群の射 $\theta: M \rightarrow N$ が**擬同型**であるとは、各 $A \in \mathcal{A}$ について複体の射 $\theta_A: M(A) \rightarrow N(A)$ が擬同型であるときをいう。

命題 2.3. dg 小圏 $\mathcal{A}$ 上の dg 加群の圏 $C(\mathcal{A})$ の擬同型に関する局所化 $D(\mathcal{A})$ が存在する．これを $\mathcal{A}$ の**導来圏**と呼ぶ．さらに導来圏 $D(\mathcal{A})$ は三角圏の構造を持つ．

dg 米田埋め込み $y: \mathcal{A} \rightarrow C_{\text{dg}}(\mathcal{A})$ から関手 $H^0(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ が誘導され、これは充満忠実になる．

定義 2.4. dg 圏 $\mathcal{A}$ が**プレ三角**であるとは、埋め込み $H^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ のもとで $H^0(\mathcal{A})$ が三角圏 $D(\mathcal{A})$ におけるシフトと錐を取る操作で閉じるときをいう．

dg 圏 $\mathcal{A}$ がプレ三角のとき、 $H^0(\mathcal{A})$ は $D(\mathcal{A})$ の部分三角圏になる．

dg 圏と dg 関手と dg 自然変換のなす 2 圏 dgCat における同値射として dg 圏の圏同値が定まるが、dg 圏には複体のホモトピー論を考慮した擬同値と呼ばれる同値概念が存在する．

定義 2.5. dg 関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ について、

- (1) F が**擬充満忠実**であるとは、すべての $A, A' \in \mathcal{A}$ に対して複体の射 $F_{AA'}: \mathcal{A}(A, A') \rightarrow \mathcal{B}(FA, FA')$ が擬同型であるときをいう．
- (2) F が**擬本質的全射**であるとは、ホモトピー圏の間に誘導される射 $H^0(F): H^0(\mathcal{A}) \rightarrow H^0(\mathcal{B})$ が本質的全射であるときをいう．
- (3) F が**擬同値**であるとは、擬充満忠実かつ擬本質的全射であるときをいう．

明らかに dg 圏同値ならば擬同値であり、 F が擬同値ならば誘導される関手 $H^0(F)$ は圏同値になる．特にプレ三角な dg 圏の間の擬同値 F が存在すれば、三角圏同値 $H^0(\mathcal{A}) \simeq H^0(\mathcal{B})$ が誘導される．

このことから擬同値な dg 圏は同じものとみなすべきである．擬同値に関する dg 圏のホモトピー論を展開するために、モデル圏構造が存在すると便利である．

定理 2.6 (dgCat 上の Tabuada モデル圏構造 [Tab05]). 小さい dg 圏のなす圏 dgCat には、擬同値を弱同値とするようなモデル圏構造が存在する．特に dgCat の擬同値による局所化が存在する．この局所化を HodgCat で表し、**dg 圏のなすホモトピー圏**と呼ぶ．

局所化 HodgCat は、擬同値な射が同型になるような圏の中で最も普遍的なものである．

dg 圏のなすホモトピー圏 HodgCat の射は、dg 両加群を用いた記述が知られている．これを紹介するために、いくつか準備をする．

定義 2.7. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を dg 小圏とする．**dg $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -両加群** X とは、dg $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{\text{op}})$ -加群、すなわち dg 関手 $X: \mathcal{B}^{\text{op}} \otimes \mathcal{A} \rightarrow C_{\text{dg}}(\mathbb{k})$ のことである．これを $X: \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$ と書くことにする．dg 両加群の dg 圏を $C(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = C(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{\text{op}})$ で表し、 $C(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = Z^0(C_{\text{dg}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ とおく．

dg $(\mathbb{k}, \mathcal{B})$ -両加群がちょうど右 dg $\mathcal{B}$ -加群と同じものである．

dg 両加群は環上の両側加群の dg 類似である．環上の加群と同様に、dg 両加群はテンソル-Hom 随伴を誘導する．すなわち、dg 両加群 $X: \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$ に対して、dg 加群圏の間の dg 随伴

$$T_X: C_{\text{dg}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\quad \perp \quad} C_{\text{dg}}(\mathcal{B}) : H_X$$

が得られる．ここで $T_X = - \otimes_{\mathcal{A}} X$ である．この随伴の導来関手を取ることで、導来圏の間の導来

随伴

$$\mathbb{L}T_X: D(\mathcal{A}) \xrightarrow{\perp} D(\mathcal{B}) : \mathbb{R}H_X$$

も得られる.

定義 2.8. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を dg 小圏とする.

- (1) dg 加群 $M \in C(\mathcal{A})$ が**擬表現可能**であるとは、導来圏 $D(\mathcal{A})$ において表現可能関手と同型となるときをいう. 擬表現可能な dg 加群のなす充満部分圏を $\overline{\mathcal{A}} \subseteq D(\mathcal{A})$ と表す.
- (2) dg 両加群 $X: \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ が**右擬表現可能**であるとは、任意の $A \in \mathcal{A}$ について dg 加群 $X(-, A) \in C(\mathcal{B})$ が擬表現可能となるときをいう. 右擬表現可能な dg 両加群のなす充満部分圏を $D(\mathcal{A}, \mathcal{B})^{\text{rqf}} \subseteq D(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と書く.

例えば, dg 関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に付随して得られる dg 両加群 $F_* = \mathcal{B}(-, F(-)): \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ は, 右擬表現可能である.

dg 両加群 $X: \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ が右擬表現可能であることは, 導来テンソル関手 $\mathbb{L}T_X: D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ が擬表現可能 dg 加群を保つことと同値である. このとき $\mathbb{L}T_X$ は関手 $\mathbb{L}T_X|_{\overline{\mathcal{A}}}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}$ を誘導する.

命題 2.9 (Toën [Toë07]). dg 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して, HodgCat の射の集合と右擬表現可能な dg 両加群の同型類の集合の間に全単射

$$\text{Hom}_{\text{HodgCat}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cong \text{Iso}(D(\mathcal{A}^{\text{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\text{rqf}})$$

が存在する. ここで Iso は圏の対象の同型類の集合を表す.

以降, 右擬表現可能な両加群も擬関手と呼ぶことにする. この Toën の結果から, $D(\mathcal{A}^{\text{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\text{rqf}}$ を Hom 圏に持つ 2 圏は dg 圏のなすホモトピー圏 HodgCat の上にあるような 2 圏構造となることが示唆される. そこで次のような圏を導入する.

定義 2.10. 次のデータは, 2 圏^{*2} DBimod を定める.

- DBimod の対象は, dg 小圏とする^{*3}.
- DBimod の Hom 圏は, dg 両加群の導来圏 $D(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ とする.
- DBimod の合成は, dg 両加群の導来テンソル積 $\odot_B^{\mathbb{L}}: D(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times D(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow D(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ とする.
- DBimod の恒等射は, Hom 関手 $\mathcal{A}(-, -): \mathcal{A}^{\text{op}} \otimes \mathcal{A} \rightarrow C_{\text{dg}}(\mathbb{k})$ を dg 両加群 $I_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{A}$ とみなしたものとする.

右擬表現可能な dg 両加群のなす DBimod の部分 2 圏を $\text{DBimod}^{\text{rqf}}$ で表す.

圏なす 2 圏 Cat と同じように一般の 2 圏においても同値や随伴を定義することができ, DBimod や $\text{DBimod}^{\text{rqf}}$ における同値・随伴は何か, と問うことが意味を成す. この問いについては, 4 節で議

^{*2} 正確には弱 2 圏または双圏 (bicategory) と呼ばれる, 結合律や単位律が up to iso. で成り立つような 2 圏になる. 本稿ではこれらもまとめて単に 2 圏と呼ぶことにする.

^{*3} 基礎環 $\mathbb{k}$ が一般の可換環の場合, DBimod の対象は locally h-projective な dg 圏に限定する必要がある. 本稿では $\mathbb{k}$ を体としており, この場合すべての dg 圏が locally h-projective になる.

論を行う。

3 形式圏論と副射装備

2 圏とは、圏と関手と自然変換のなす 2 圏 Cat のように、対象と射に加えて射の間の射（2 射）の概念を備えた圏のことである。抽象的な 2 圏においても、同値や随伴の概念が定義可能である。

定義 3.1. $\mathcal{K}$ を 2 圏とする。

- (1) $\mathcal{K}$ における**同値**とは、射 $f: A \rightarrow B$ と $u: B \rightarrow A$ の組であって、 $u \circ f \cong \text{id}_A$ かつ $f \circ u \cong \text{id}_B$ となるものをいう。
- (2) $\mathcal{K}$ における**随伴**とは、射 $f: A \rightarrow B$, $u: B \rightarrow A$ と 2-セル $\eta: \text{id}_A \Rightarrow u \circ f$, $\varepsilon: f \circ u \Rightarrow \text{id}_B$ の四つ組であって、三角等式

$$\begin{array}{ccc} & B & \xrightarrow{\text{id}_B} B \\ & \nearrow f & \searrow u \\ A & \xrightarrow{\text{id}_A} A & \nearrow f \\ & \nwarrow \eta & \nearrow \varepsilon \end{array} = \text{id}_f, \quad \begin{array}{ccc} & B & \xrightarrow{\text{id}_B} B \\ & \nwarrow u & \nearrow f \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} B & \nwarrow u \\ & \nwarrow \varepsilon & \nearrow \eta \end{array} = \text{id}_u$$

をみたすものをいう。このとき f を**左随伴**, u を**右随伴**, η を**単位**, ε を**余単位**と呼ぶ。

さて、環上の加群に関する議論がアーベル圏での抽象ホモロジー代数として形式化されたように、圏の理論を形式化することはできないだろうか。例えば、加群のなす圏が持つ性質を抽象化することでアーベル圏が導入されたのと同じように、圏のなす 2 圏が備えている性質や構造を抽出することで、圏論を形式的に展開する枠組みを定義できないだろうか。このような、通常の圏論での諸理論を 2 圏論的に抽象化しようとする試みを**形式圏論**と呼ぶ。

より具体的に言えば、圏のなす 2 圏 Cat において成り立つ定理を synthetic な視点から捉え直し、そうした定理を一般の 2 圏 $\mathcal{K}$ において公理的に展開しようとする分野が形式圏論である。圏の名を冠する概念には通常の圏に加えて、豊穡圏や内部圏、無限圏などさまざまなものが存在しているが、多くの場合、そのそれぞれが通常の圏と同じように 2 圏をなし、本質的に同じ定理が証明できる。そうした現象を統一的に扱おうとすることが形式圏論の目的である。

副射装備は、形式圏論を行うための枠組みの一つで Wood [Woo82, Woo85] により導入された。副射装備の実体は 2 圏の間の埋め込み $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{M}$ であり、 $\mathcal{M}$ という補助的な 2 圏を用いることで 2 圏 $\mathcal{K}$ における“圏論”を形式的に展開することを可能にする。典型例は、圏のなす 2 圏 Cat からプロ関手のなす 2 圏への埋め込み関手 $(-)_*: \text{Cat} \hookrightarrow \text{Prof}$ である。副射装備の構造を用いると、通常の圏論におけるような極限の概念が対象 $K \in \mathcal{K}$ 上に抽象的な方法で定義できる。もちろん Cat に付随する副射装備 $(-)_*: \text{Cat} \hookrightarrow \text{Prof}$ において極限を考えれば、圏 $C \in \text{Cat}$ での極限の定義が復元される。

副射装備の定義を述べよう。

定義 3.2 ([Woo82, Woo85]). 2 圏の間の 2 関手 $*4(-)_*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$ が**副射装備**であるとは、三条件

- (1) $(-)_*$ は対象上全単射である
- (2) $(-)_*$ は局所充満忠実である

(3) 任意の $\mathcal{K}$ の射 f に対して, f_* は $\mathcal{M}$ において右随伴 f^* を持つ

をみたすときをいう.

$\mathcal{M}$ の射 X が $\mathcal{K}$ の射 f を用いて $X \cong f_*$ となるとき, X は f によって *representable* であるという. 副射装備 $(-)_*$ は対象上全単射であるから, 以降 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{M}$ の対象を同一視して $\text{ob}(\mathcal{K}) = \text{ob}(\mathcal{M})$ であるとする.

例 3.3. 小圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して, **プロ関手** $X: \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ とは関手 $X: \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ のことを指す. プロ関手 $X: \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$, $Y: \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{C}$ に対して, その“合成” $Y \odot X: \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{C}$ をコエンド

$$(Y \odot X)(c, a) = \int^{b \in \mathcal{B}} Y(c, b) \times X(b, a)$$

によって定義する. この合成によって, 小圏とその間のプロ関手は 2 圏 Prof をなす. Hom 関手 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, -): \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$ をプロ関手 $I_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{A}$ とみなしたものが Prof における $\mathcal{A}$ の恒等射となる.

関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対してプロ関手 $F_*: \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ を

$$F_* = \mathcal{B}(-, F(-)): \mathcal{B}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$$

によって定める. このとき F_* は Prof において $F^* = \mathcal{B}(F(-), -): \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{A}$ を右随伴に持つことがわかる. したがって 2 関手

$$(-)_*: \text{Cat} \rightarrow \text{Prof}, \quad F \mapsto F_*$$

は副射装備である.

例 3.4. より一般に $\mathcal{V}$ をコスモス^{*5} とするとき, $\mathcal{V}$ -豊穠小圏の間の豊穠プロ関手 $X: \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ を, $\mathcal{V}$ -関手 $X: \mathcal{B}^{\text{op}} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{V}$ によって定義する. このとき $\mathcal{V} = \text{Set}$ のときと同様に, $\mathcal{V}$ -プロ関手は 2 圏をなし, 2 関手

$$(-)_*: \mathcal{V}\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{V}\text{-Prof}, \quad F \mapsto \mathcal{B}(-, F(-))$$

は副射装備になる.

副射装備の構造を用いると, 極限の概念を 2 圏論的に定義することができる.

定義 3.5 ([Woo82, §2]). $(-)_*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$ を副射装備とする. $\mathcal{K}$ の射 $f: J \rightarrow A$ と $\mathcal{M}$ の射 $W: J \rightarrow M$ に対して, f の W -重み付き極限とは, $\mathcal{K}$ の射 $\lim^W f = \{W, f\}: M \rightarrow A$ と $\mathcal{M}$ における右 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \uparrow W & \searrow \{W, f\}_* & \\ J & \xrightarrow{f_*} & A \end{array}$$

の組のことをいう. f の W -重み付き極限が存在すれば, $\{W, f\}_* = \text{Ran}_W f_*$ である. 言い換えれば極限 $\{W, f\}$ が存在するのは, 右 Kan 拡張 $\text{Ran}_W f_*$ が存在してこれが *representable* なときである.

*4 ここでは弱 2 関手または pseudo-functor のこともまとめて 2 関手と呼ぶことにする.

*5 完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏のことをコスモスという. 複体の圏 $\text{Ch}(\mathbb{k})$ はコスモスの例である.

例 3.6. 例 3.4 のように豊穡圏のなす副射装備 $(-)_*: \mathcal{V}\text{-Cat} \rightarrow \mathcal{V}\text{-Prof}$ を考える． $M = \mathcal{I}$ を単位 $\mathcal{V}$ -豊穡圏とする． $\mathcal{V}$ -関手 $F: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$ と $\mathcal{V}$ -プロ関手 $W: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ に対して， $\mathcal{V}\text{-Prof}$ における右 Kan 拡張 $\text{Ran}_W F_*: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ は

$$\text{Ran}_W F_*(A, *) = \text{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{V})(W(*, -), \mathcal{A}(A, F-))$$

で与えられる．このことから定義 3.5 の意味での F の W -重み付き極限とは，ちょうど [Kel82, §3.1] の意味で余前層 $W: \mathcal{J} \cong \mathcal{I}^{\text{op}} \otimes \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{V}$ を重みとする F の極限に等しい．

4 主結果

dg 圏のホモトピー圏 HodgCat は 1 圏であり 2 射の構造を持っていないが，dg 両加群を用いて HodgCat の上部にあるような 2 圏 $\text{DBimod}^{\text{rqr}}$ を構成することができる．これは 2 圏 DBimod の部分 2 圏である．こうした 2 圏においても， Cat と同様，同値や随伴を定義することができる．それらは dg 圏の間のホモトピー論を考慮した同値・随伴の概念を捉えていると考えられる．先行研究として，2 圏 DBimod における随伴について次の結果が示されていた．

命題 4.1 (Genovese [Gen17]). 右擬表現可能な dg 両加群は DBimod において右随伴を持つ．

この結果を一般化し，2 圏 DBimod や $\text{DBimod}^{\text{rqr}}$ における同値・随伴について以下のような特徴づけを明らかにした．

定理 4.2 (I.). dg 両加群 $X: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対し，次は同値：

- (1) X は 2 圏 DBimod において右随伴を持つ．
- (2) 導来 Hom により誘導される関手 $\mathbb{R}H_X: D(\mathcal{B}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ は余積を保つ．
- (3) X は右コンパクト，すなわち任意の $A \in \mathcal{A}$ について $X(-, A) \in D(\mathcal{B})$ はコンパクト対象である*6．

擬表現可能な dg 加群はコンパクトだから，この定理からも確かに右擬表現可能な dg 両加群は右随伴を持つことがわかる．

定理 4.3 (I.). dg 両加群 $X: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が 2 圏 DBimod において同値射であることは，導来テンソル積により誘導される関手 $\mathbb{L}T_X: D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ が圏同値になることと同値である．

定理 4.4 (I.). 擬関手 $X: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が 2 圏 $\text{DBimod}^{\text{rqr}}$ において同値射であることは，誘導される二つの関手 $\mathbb{L}T_X: D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$ ， $\mathbb{L}T_X|_{\overline{\mathcal{A}}}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{B}}$ の両方が圏同値になることと同値である．

この特徴づけから特に次がわかる．

系 4.5 (I.). dg 関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が擬同値であることは，付随する dg 両加群 $F_* = \mathcal{B}(-, F(-)): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ が 2 圏 $\text{DBimod}^{\text{rqr}}$ において同値射になることと同値である．

*6 ここで余積を持つ三角圏 $\mathcal{T}$ の対象 C がコンパクトであるとは，関手 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(C, -): \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Ab}$ が余積を保つときをいう．

2 圏 $\text{DBimod}^{\text{rqr}}$ における随伴は、**擬同値の随伴**と呼ばれる。 $\text{DBimod}^{\text{rqr}}$ は DBimod の局所充満な部分 2 圏であることから、擬関手 f が右随伴を持つことは、 DBimod における右随伴 f^* が擬関手となることと同値である。

豊穡関手としての dg 関手の随伴や H^0 -圏の間の随伴との関係について、以下のことも証明した。

命題 4.6 (I.). dg 関手の随伴 $F \dashv G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対して、付随する擬関手の随伴 $F_* \dashv G_*$ が成り立つ。

命題 4.7 (I.). 擬関手の随伴 $f \dashv u: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ があるとき、通常の随伴 $\bar{f} \dashv \bar{u}: \bar{\mathcal{A}} \rightarrow \bar{\mathcal{B}}$ が得られる。圏同値 $H^0(\mathcal{A}) \simeq \bar{\mathcal{A}}$ が成り立つことから、 $H^0(\mathcal{A})$ と $H^0(\mathcal{B})$ の間の随伴も誘導される。

Genovese の結果 (命題 4.1) もしくは定理 4.2 より、擬関手は DBimod において右随伴を持つ。よって包含関手 $\text{DBimod}^{\text{rqr}} \hookrightarrow \text{DBimod}$ を $(-)_*$ で表すとき、

- (1) $(-)_*$ は対象上全単射である
- (2) $(-)_*$ is locally fully faithful.
- (3) 擬関手 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に対し f_* は DBimod において右随伴 f^* を持つ

が成り立つ。すなわちこれは包含関手 $(-)_*: \text{DBimod}^{\text{rqr}} \hookrightarrow \text{DBimod}$ が副射装備であることを意味する。したがって 3 節で紹介したような副射装備の理論が適用できる。

副射装備 $(-)_*: \text{DBimod}^{\text{rqr}} \hookrightarrow \text{DBimod}$ に対し副射装備における (余) 極限の定義を適用したものを、dg 圏における**ホモトピー (余) 極限**と呼ぶ。例えば、終対象の対応物を考えると次のように翻訳される。

定義 4.8 (h-terminal object). dg 圏 $\mathcal{A}$ に対し、 $\mathcal{J} = \emptyset$ を空な dg 圏、 $f: \emptyset \rightarrow \mathcal{A}$ を一意的な dg 関手 $\emptyset \rightarrow \mathcal{A}$ に付随する擬関手、 $W: \emptyset \rightarrow \mathbb{k}$ を 0 加群とする。このとき f の W -重み付き極限を、 $\mathcal{A}$ での **h-終対象**と呼ぶ。

命題 4.9 (I.). dg 圏 $\mathcal{A}$ が h-終対象を持つことは、 $H^0(\mathcal{A})$ が終対象 (零対象) を持つことと同値である。

dg 圏における豊穡極限としての終対象の存在は台圏 $Z^0(\mathcal{A})$ における終対象の存在と同値であるから、h-終対象は dg 圏のホモトピー論的側面を反映した終対象の概念を捉えられている。

シフトや余錐の対応物は以下ようになる。ここで複体 $S(\mathbb{k}), D(\mathbb{k})$ を

$$\begin{aligned} S(\mathbb{k}): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{k} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots & \quad \text{with } S(\mathbb{k})^0 = \mathbb{k} \\ D(\mathbb{k}): \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{k} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{k} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots & \quad \text{with } D(\mathbb{k})^{-1} = D(\mathbb{k})^0 = \mathbb{k} \end{aligned}$$

とし自然な単射を $\iota: S(\mathbb{k}) \rightarrow D(\mathbb{k})$ とする。

定義 4.10 (h-shift). dg 圏 $\mathcal{A}$ に対し、 $\mathcal{J} = \mathbb{k}$ を単位 dg 圏、 $f: \mathbb{k} \rightarrow \mathcal{A}$ を対象 $A: \mathbb{k} \rightarrow \mathcal{A}$ に付随する擬関手、 $W: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$ を複体 $S^n(\mathbb{k}) := S(\mathbb{k})[-n]$ を選択する dg 関手 $\mathbb{k}^{\text{op}} \otimes \mathbb{k} \cong \mathbb{k} \rightarrow C_{\text{dg}}(\mathbb{k})$ とする。このとき f の W -重み付き極限を A の**ホモトピー n -シフト**と呼ぶ。

命題 4.11 (I.). dg 圏 $\mathcal{A}$ がすべてのホモトピーシフト (h-シフト) を持つことは, 埋め込み $H^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ のもと $H^0(\mathcal{A})$ が $D(\mathcal{A})$ のシフトで閉じることと同値である.

定義 4.12 (h-cocone). dg 圏 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{J} = 2$ を順序集合 $\{0 < 1\}$ で生成される自由 dg 圏, $f: 2 \rightarrow \mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の射 $a: A \rightarrow B$ を選択する dg 関手 $2 \rightarrow \mathcal{A}$ に付随する擬関手, $W: 2 \rightarrow \mathbb{k}$ を複体の射 $\iota: S(\mathbb{k}) \hookrightarrow D(\mathbb{k})$ を選択する dg 関手 $\mathbb{k}^{\text{op}} \otimes 2 \cong 2 \rightarrow C_{\text{dg}}(\mathbb{k})$ とする. このとき f の W -重み付き極限を a の **h-余錐**と呼ぶ.

命題 4.13 (I.). dg 圏 $\mathcal{A}$ がすべての h-余錐を持つことは, 埋め込み $H^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ のもと $H^0(\mathcal{A})$ が $D(\mathcal{A})$ の余錐で閉じることと同値である.

これらの特徴づけから, dg 圏のプレ三角性が特定のホモトピー極限を持つこととして特徴づけられることがわかる:

系 4.14 (I.). dg 圏 $\mathcal{A}$ がプレ三角であることは, $\mathcal{A}$ がすべての h-シフトと h-余錐を持つことと同値である.

参考文献

- [Gen17] F. Genovese. *Adjunctions of quasi-functors between dg-categories*. Appl. Categor. Struct. 25 (2017), 625–657.
- [Ima24] Yuki Imamura. *A formal category theoretic approach to the homotopy theory of dg categories*. arXiv preprint, 2024. arXiv: [2405.07873](https://arxiv.org/abs/2405.07873) [math.CT].
- [Kel82] G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. Vol. 64, London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.
- [Tab05] Goncalo Tabuada. *Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340 (2005), No. 1, 15–19.
- [Toë07] B. Toën. *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*. Invent. Math. 167 (2007), 615–667.
- [Woo82] R. J. Wood. *Abstract proarrows I*. Cah. Topol. Goem. Différ. Catég. 23 (1982), No. 3, 279–290.
- [Woo85] R. J. Wood. *Proarrows II*. Cah. Topol. Goem. Différ. Catég. 26 (1985), No. 2, 135–168.